جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل متجهات
السنة الثانية
الدورة التكميلية 2015-2016

الاسم:
الدرجة: 100
المدة: ساعة ونصف

السؤال الأول (20 درجة):

1. أجب بصح أو خطأ عن كل من الأسئلة التالية: $(5 \times 2 = 10)$
   a. يتحدد المستوي بمعرفة أي ثلاث نقاط في الفضاء.
   b. يُعطى الجداء الثلاثي المتجهي بالعلاقة: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{C}.\vec{A}).\vec{B} + (\vec{B}.\vec{A}).\vec{C}$
   c. إن $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{grad}\ f = 0$ حيث f حقل سلمي.
   d. تقوس منحنٍ يبلغ أكبر قيمة له في النقطة التي يكون فيها المنحني أكثر انحناءً.
   e. عندما يتكرر مرور المنحني في نقطة منه عدة مرات بحيث يكون له عدداً من المماسات بعدد التكرارات عندئذٍ ندعو تلك النقطة بأنها نقطة تراجع.

2. ليكن لدينا المتجهات:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

أوجد الجداء المختلط لهذه المتجهات و ما هو المعنى الهندسي للجداء المختلط لثلاث أشعة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1. بفرض أن f حقل سلمي و $\vec{V}$ حقل متجهي، عندئذ أثبت صحة العلاقة التالية:

$$div(f\vec{V}) = f.div(\vec{V}) + \vec{V}.\overrightarrow{grad}(f)$$

2. أوجد المشتق الموجه للدالة $f = x^2yz$ عند النقطة $p(1,-2,-1)$ باتجاه المتجه $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

السؤال الثالث: (25 درجة)

أحسب التكامل السطحي للحقل $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$
على السطح $x^2 + y^2 = a^2$ حيث:

$$-a \le x \le +a, -a \le y \le +a, 0 \le z \le \pi$$

السؤال الرابع: (25 درجة)

ليكن لدينا المنحني المُعطى بدلالة الوسيط الطبيعي بالشكل:

$$\vec{R}(s) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

أوجد: متجه واحدة المماس، متجه التقوس، تقوس المنحني، نصف قطر التقوس، متجه واحدة الناظم الأساسي، متجه واحدة ثنائي الناظم.

*********************************انتهت الأسئلة*********************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح و التوفيق
حمص في 31-8-2016

مدرسي المقرر: د. وعد صافتلي
د. سامي الحسين

جامعة البعث
كلية العلوم - السنة الثانية
قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل متجهات
الفصل الدراسي الثاني 2015-2016
الدرجة: 100

مدرسة المقرر: د. وعد صافتلي

جواب السؤال الأول (20 درجة):

a. خطأ
b. خطأ
c. خطأ
d. صح
e. خطأ

10 درجات

الجداء المختلط لثلاث أشعة يعطى بالشكل

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = (2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})(7\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 14 + 3 + 3 = 20$$

5 درجات

يمثل الجداء المختلط لثلاث متجهات حجم متوازي السطوح المُنشأ على تلك المتجهات.

5 درجات

جواب السؤال الثاني (30 درجة):

1. أثبت أن:

$$div(f\vec{V}) = f.div(\vec{V}) + \vec{V}.\overrightarrow{grad}(f)$$

بفرض

$$\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

$$f\vec{V} = fV_1\vec{i} + fV_2\vec{j} + fV_3\vec{k}$$

د. وعد صافتلي

$$div(f\vec{V}) = \frac{\partial(fV_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fV_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fV_3)}{\partial z}$$

5درجات

$$= f\frac{\partial(V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f)}{\partial x}V_1 + f\frac{\partial(V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f)}{\partial y}V_2 + f\frac{\partial(V_3)}{\partial z} + \frac{\partial(f)}{\partial z}V_3$$

5درجات

$$= f\left(\frac{\partial(V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(V_3)}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial(f)}{\partial x}V_1 + \frac{\partial(f)}{\partial y}V_2 + \frac{\partial(f)}{\partial z}V_3\right)$$

$$= f(\vec{\nabla}\vec{V}) + (\vec{\nabla}f)\vec{V} = f div\vec{V} + \vec{V}\overrightarrow{grad}f$$

5درجات

2. إن المشتق الموجه للدالة $f = x^2yz$ عند النقطة $p(1,-2,-1)$ باتجاه المتجه $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ يعطى بالشكل:

$$\overrightarrow{grad}f|_p.\vec{u}$$

حيث أن $\vec{u}$ هو متجه الواحدة للمتجه $\vec{A}$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2xyz\,\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$$

5درجات

$$\overrightarrow{grad}f|_p = 4\,\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

5درجات

$$\overrightarrow{grad}f|_p.\vec{u} = (4\,\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{13}{3}$$

5درجات

جواب السؤال الثالث (25 درجة):

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$$

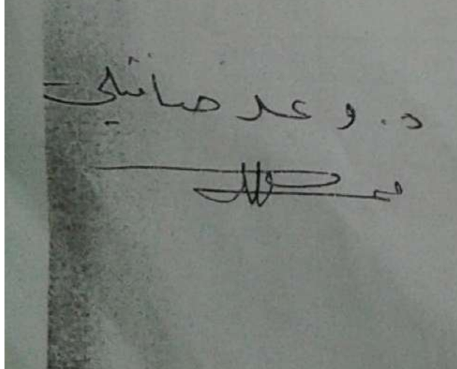
يمكن كتابة السطح بالشكل :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = \iint \vec{F}.\vec{n}ds = \iint \vec{F}\vec{n}\,\frac{dxdz}{\vec{n}.\vec{j}}$$

5درجات

السطح مُعطى بالشكل الديكارتي فالناظم على السطح يُعطى بالشكل:



$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{grad}f}{|\overrightarrow{grad}f|}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right|}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\sqrt{a^2}}=\frac{x}{a}\vec{i}+\frac{y}{a}\vec{j}$$

5درجات

$$S=\iint \vec{F}.\vec{n}ds=\iint \vec{F}\vec{n}\,\frac{dxdz}{\vec{n}.\vec{j}}=\iint\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+3z\,\vec{k}\right)\left(\frac{x}{a}\vec{i}+\frac{y}{a}\vec{j}\right)\frac{dxdz}{\vec{n}.\vec{j}}$$

5درجات

$$=\iint\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}\right)\frac{dxdz}{\frac{y}{a}}=\iint\frac{x^2+y^2}{y}dxdz=\iint\frac{x^2-x^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz$$

5درجات

$$\int_0^{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz=a^2\int_0^{\pi}dz\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\pi\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{+a}$$

$$=a^2\pi\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=a^2\pi^2$$

5درجات

جواب السؤال الرابع (25 درجة):

$$\vec{R}(s)=a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i}+a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

واحدة المماس:

$$\vec{T}=\vec{R}^{\cdot}(s)=-\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i}+\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

5درجات

متجه التقوس :

$$\vec{K}=\vec{T}^{\cdot}=\vec{R}^{\cdot\cdot}(s)=-\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i}-\frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

5درجات

تقوس المنحني:

$$k=|\vec{T}^{\cdot}|=\frac{1}{a}$$

نصف قطر التقوس:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

5درجات

متجه واحدة الناظم الأساسي:

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}^{\cdot}}{|\vec{T}^{\cdot}|} = -\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

5درجات

متجه واحدة ثنائي الناظم:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\left(\frac{s}{a}\right) & \cos\left(\frac{s}{a}\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{s}{a}\right) & \sin\left(\frac{s}{a}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left(\sin^2\left(\frac{s}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{a}\right)\right)\vec{k} = \vec{k}$$

5درجات

*******************************انتهى السلم*********************************

د. وعد صافكي

أ. د